

【原著】

動的幾何と拓く発想の森

吉 田 裕 午

Forest of Idea developed with Dynamic Geometry

Yugo Yosida

キーワード：発想，メタファ，動的幾何，森，距離，位置，境界，カタチ，繰り込み概念，媒介変数（パラメータ），創造的思考力，脳内スクリーン，まだら，エントレイン，創発，形態形成，分岐，オントロジーの銀河，生成子，ホドグラム，ポロノイ図，薫習，ユーゴ図法，思考の正四面体，直観鍛錬

1. はじめに

発想が生まれる場のメタファとして，動的幾何を導きの明かりとする森をイメージして，まとめてみた。あらゆる分野で顕著になり始めた感がある，距離・位置や境界・カタチの不確かさが，これまでの理論・仮説の検証・反復・再構築を要請している。情報社会や教育の情報化にとっても，生成的・包括的概念として発展した繰り込み概念²⁾⁻¹⁷⁾が，示唆に富んだ指針を与えている。

動的幾何は，その解決策として，幾何図形と媒介変数（パラメータ）を自由な思考と結びつけ，要請されている創造的思考力の強力エンジンとなっている。また，論理的思考の基礎である定理や法則を図として視覚化し，芸術的な美の動機モチーフにも誘っている。

動的幾何は，脳内スクリーンと同じく，2次元への射影ではあっても，アニメーションや3次元以上の繰り込み表現も可能であり，「まだら性」フラクタルともいえる（自己相似的）階層連携のシステム，また「エントレイン性」という闇や影の取り込みすら，連動する色彩陰影や面の雰囲気によって表現できる。

形態進化の歴史を，パラメータの分岐によって表現するのも創発である。以前示したように，射影としての1次関数や，代数方程式も，ベクトルや行列の繰り込みとして，見通しよく分類される。ローレンツ変換も直観的な2つの変換に分割し，図解を加えている。その部分集合に名前をつけるのも楽しい作業であるが，言葉のカタチや数学の意味も深いと思われる。

また，パラメータのコントロールに伴うカタチは，形態形成にも示唆を与える新たな発想に結びつく。この表現は，非線形や複雑系にも，部分安定なカタチからの分岐を容易にしている。

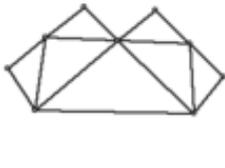
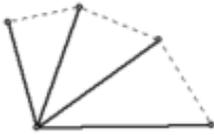
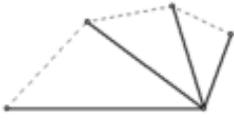
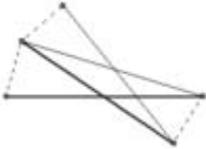
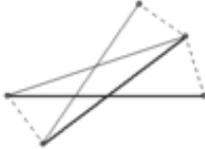
外的宇宙や内的宇宙の整合性・調和性は，見えない関連性の糸を類推させるが，空間を充填していく様は，まさに思考の銀河とも表現される美しさを持っている。識を上昇させたオントロジーの銀河もこれらの相似として類推されることであろう。

2. 相似による生成

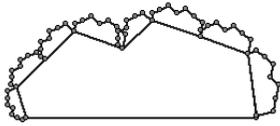
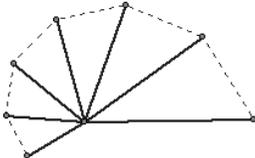
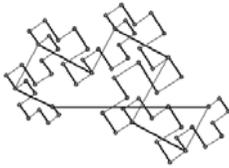
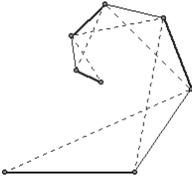
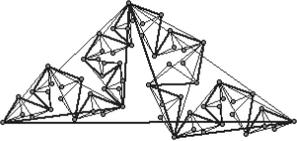
複製コピー，すなわち，相似による生成を，向きつきの線分（生成子generator）と，通常は

その展開形である折れ線パスの2辺の関わりで表現してみる。向きつきの意味は、線分に対して、左右を区別する意味である。向きを逆にすると、点対称の関係がある。また、線分に対して線対称を取り入れると、これはスピン操作にあたる。中継点をパラメータとすると、1-parameter図形について、下記のような $3 \times 3 - 1 = 8$ 通りの生成がある。

正向き p を実線、逆向き n を細線、生成なし 0 を点線で表記すると、3 次までの生成は次のようになる。

		
1-pp : 雲	1-p0 : 巻貝 (渦)	1-pn : 折り紙 (雷)
		
1-0p : 先巻貝 (渦)		1-0n : 歯車 (鶴)
		
1-np : 先折り紙 (雷)	1-n0 : 先歯車 (鶴)	1-nn : 雪 (森)

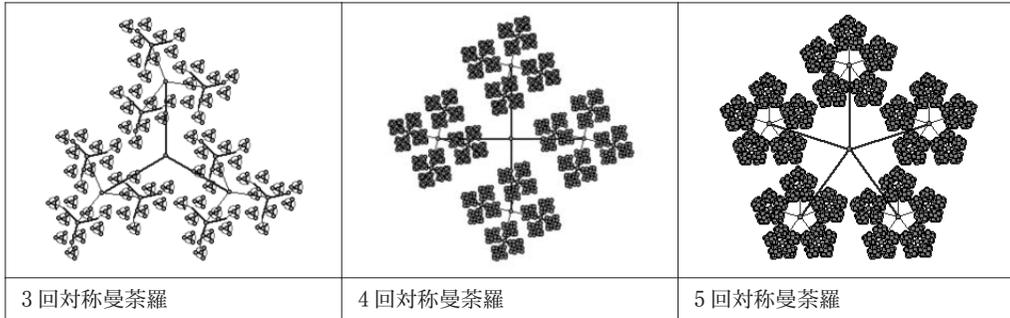
ローカルな名称でも使われているが、メタファとして6次の形態を示す。

		
雲のメタファ	巻貝のメタファ	雷のメタファ
		
鶴のメタファ	雪のメタファ	

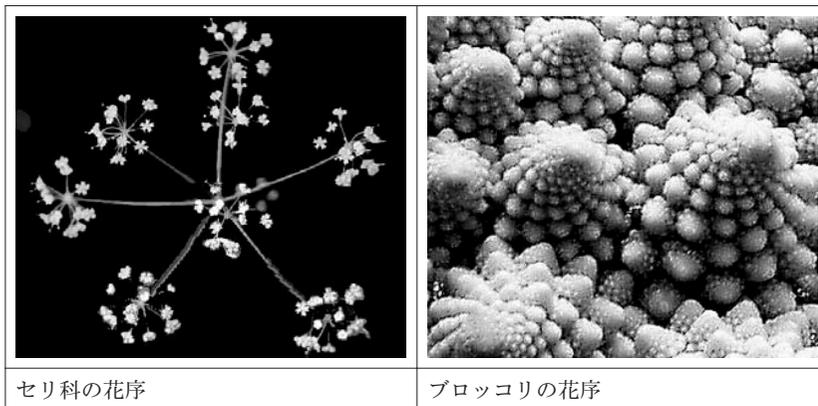
巻貝のメタファを複素数平面で捉えると、次数と射影子propagator $Z=e^z=Ae^{i\theta}$ が対応する。

2次行列では、回転および等比的拡大が条件となり、 $T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = rR$ 、ただし、 $R = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ 、 r は拡大比率、 $c = \cos \theta$ 、 $s = \sin \theta$ 、 θ は回転角となる。また、 T^n について、大きさは r^n 、回転角は $n\theta$ の関係がある。これは、高次方程式への応用の他に、線形微分方程式による射影の振舞の図的解釈に有用である。すなわち、線形2次微分方程式においては、射影子 e^{At} の固有値による分解によって、実固有値の場合は、等比的に拡張する2つの方向、虚数固有値の場合は、原点に対し螺旋的に拡張するイメージが得られる。高次微分方程式においても、実固有値の数に対応する等比的に拡張する方向と、虚数固有値のペアに対応する螺旋的に拡張するイメージの重なりになっている。行列による射影への動的幾何の応用については、4に後述する。

鶴のメタファは、曼荼羅記述に向いている。下に、3、4、5回対称の繰り込み的表現を図示する。複数パラメータの連動によって、階層的な銀河の動きのようなシミュレーションができる。



セリ科の集合花も曼荼羅に似て、心を和ませる。ブロッコリの花序も鶴の首の連なりを連想させるが、その数学的記述が形態形成の一面を暗示している。



なお、鶴の複素数点列 z_n を求めると、 $z_1 - z_0 = A$ 、 $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = z$ 、 $z' = z - 1$ とにおいて、

$$z_1 - z_0 = A$$

$$z_2 - z_1 = (z-1)(z_1 - z_0) = z'(z_1 - z_0) = z'A$$

$$z_3 - z_2 = z'(z_2 - z_1) = z'^2 A$$

⋮

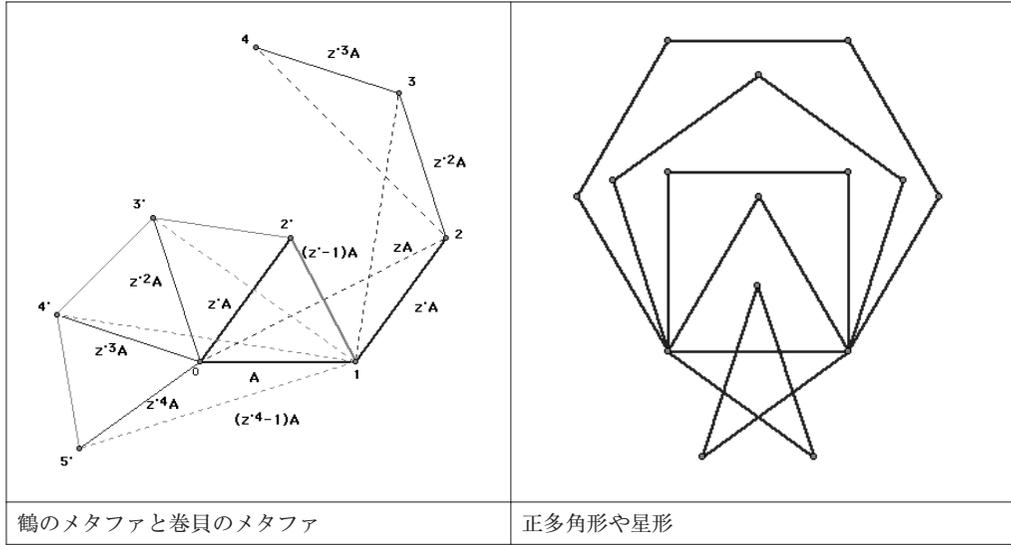
⋮

$$z_n - z_{n-1} = z'^{n-1}A$$

両辺足し合わせて、

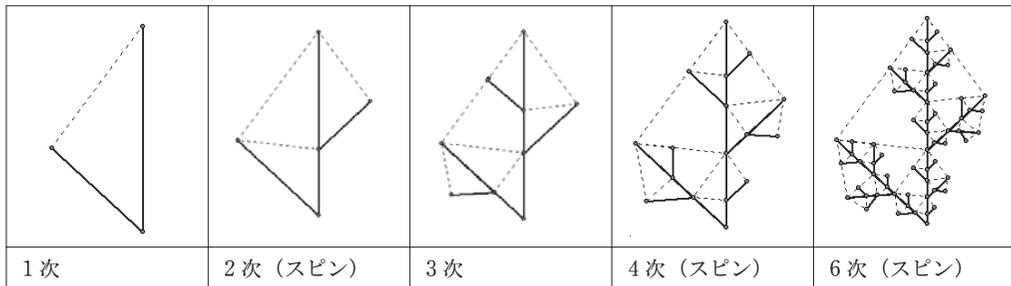
$$z_n = z_0 + (z'^{n-1} + \dots + z' + 1)A = z_0 + \frac{z'^n - 1}{z' - 1}A \text{ となる。}$$

これは、ホドグラム（速度ベクトルの軌跡）の表現にもなっており、次のように簡単な図解により、鶴と巻貝のメタファ間の変換ができる。



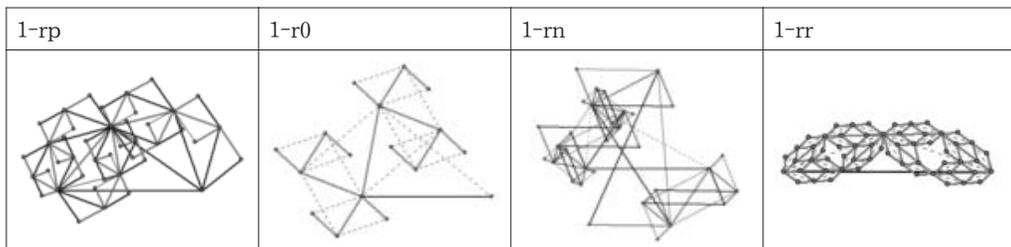
なお、 $z' = e^{i\theta}$ の時は、円上に点列を形成し、正多角形や星形の幾何とも結びついている。

スピン（線対称操作、表裏反転）を取り入れると1-parameter表現もさらに、多様性を増す。相似反転の生成子を太線で示すと、2次で通常の生成子に戻る。名称を「杉のメタファ」とした。接ぎ木の要領で、次々次数を上げていくことができる。



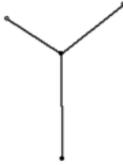
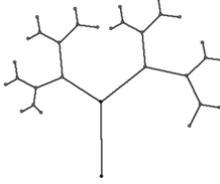
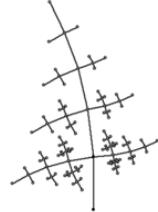
また、線分の生成子に、 p 正 n 逆の両方の向き（ r で表記）を持たせることも可能である。

r の対称性により、次の4種が可能である。 r は、 p と n 双方の特徴を持っている。

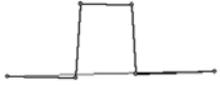
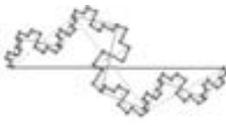
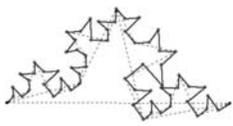
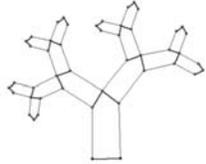


作図上の工夫として、もとの1次図形に対し、点対称の n 、あるいは、 p と n のセットとしての r 、あるいは、線対称のスピンの図形 (s) を用意しておく、次数をあげる作業がはかどる。注意点は、 n 逆の n 逆で p 正、 s スピンの s スピンで p 正ともともにもどるが、2次ごとにまとめて次数をあげることができる。コードを逆向きに読む記述では、 n を q と表記した。

1-parameterの鶴の生成子の先を複数に分裂させ、それぞれ自己相似に成長させると、木やシダのメタファが得られる。これらは、2(3)-parameterフラクタル図形の1つのタイプになっている。それぞれ、下記の表記で、 $2-(0n)^2$ 、 $3-(0n)^3$ となる。

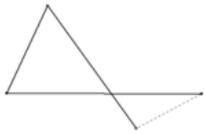
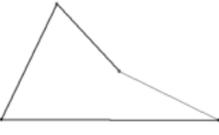
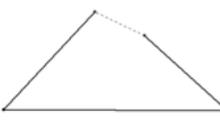
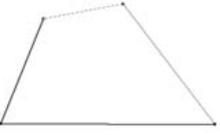
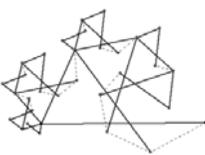
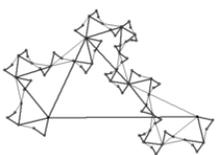
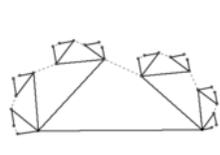
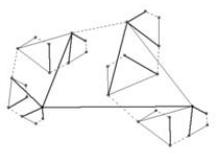
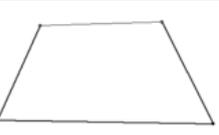
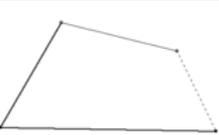
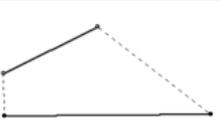
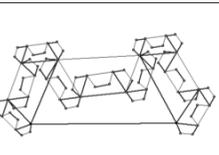
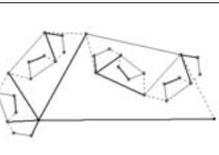
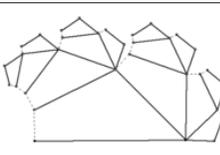
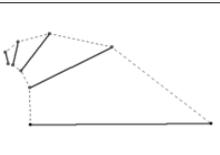
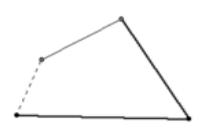
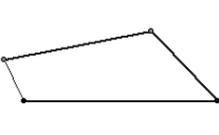
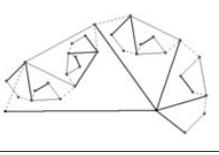
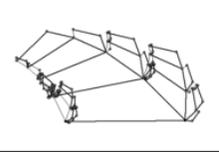
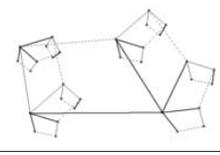
			
2分岐1次	木4次	3分岐1次	シダ4次

次に、1-ppの拡張として、中継点の分裂形態と見なせる2-ppp (紐)、3-pppp (雪森拡張)、3-0pp0 (太木)、4-ppppp (ステッチ) の七変化を示す。ドラゴン曲線、雪片曲線と呼称される図形もなめらかに包括している。

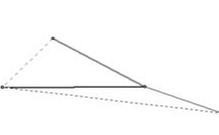
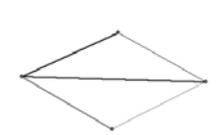
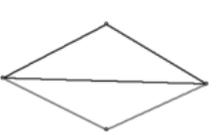
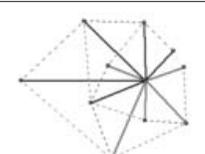
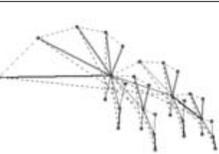
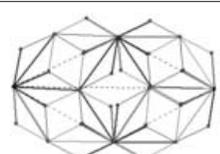
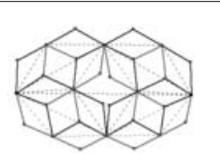
2-ppp=2-qqq (紐)	3-pppp (雪森拡張)	3-0pp0 (太木)	4-ppppp (ステッチ)
			
			

生成子がまさしく成長点を記述している。また、中継点の分岐・融合がフラクタル図形間のつながりを発想させる。太木の枝幅を細くすると木になり、雪森拡張の中継点に条件をつけると元祖雪や森となる。自由度の獲得と進化は強く結びついているという発想に到る。

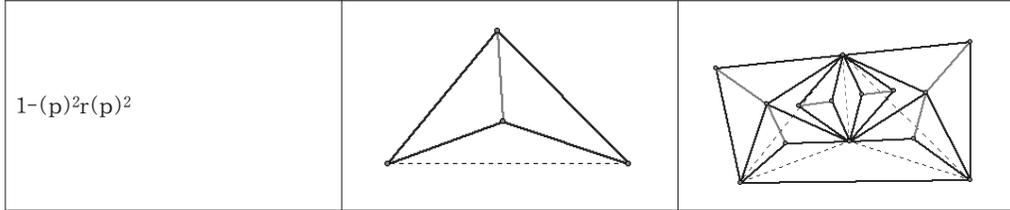
次に、生成子が線分となる場合の記述を工夫する。1-parameter図形について、 ${}_3C_2 - 1 = 2$ 本の経路について、 $p, 0, n$ の3通りを考え、00を除いて、 $3^2 - 1 = 8$ 通りを考える。同様に、2-parameter図形について、 ${}_4C_2 - 1 = 5$ 本の経路について、 $p, 0, n$ の3通りあり、0000を除くと、 $3^5 - 1 = 242$ 通りとなる。2-ppp=2-qqqのような1経路については、対称性で分類すると、さらに次の11通りのバリエーションがある。

$2-p_0=2-0q_0$	$2-ppq=2-pq_0$	$2-p_0p$	$2-p_0q$
			
			
$2-ppp=2-qp_0$	$2-pq_0=2-0pq$	$2-0pp=2-qq_0$	$2-0p_0=2-0q_0$
			
			
$2-0qp=2-qp_0$	$2-qp_0=2-qp_0$	$2-q_0p$	$2-*00=1-*0$ $2-00*=1-0*$ 5通り
			
			

次に、木 $2-(0n)^2$ を含む2経路図形を考察する。なお、2分岐2経路を $()^2$ で表記した。いくつか、実際に描いてみると、次のようになる。

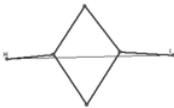
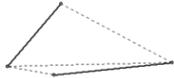
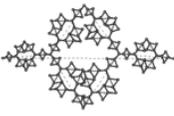
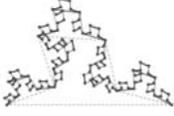
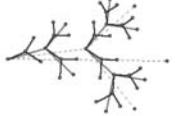
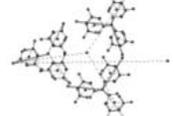
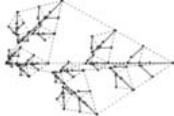
$2-(0p)^2$	$2-(0p)(0n)$	$2-(pn)^2$	$2-(pp)^2$
			
			

ところで、これらの2つの経路をつなぐ残る1つの経路の意義は何であろうか？日常の概念では、バイパス、フィードバックなどが相当する。なお、対称性を考慮し、この経路には、 r をあてている。



このバイパスメタファは、中継経路がポロノイ図のような領域の境界となっており、次元線り込みで考察した薫習（鏡像）に相当する経路であり、横断性といってもいいような特徴を持っている。

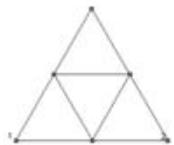
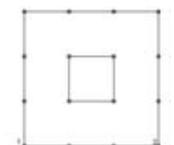
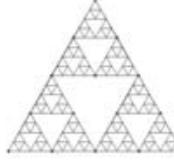
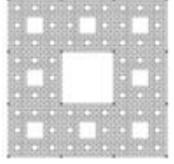
線分生成子の多様性は非常に豊かであるが、興味をそそる図形のいくつかとそのメタファおよび記述をあげる。

4-p(pp) ² p ネット・蕨	4-pnpnp 炎	3-p(p0) ² 苔・花火	3-p(n0) ² 触手	2-(s0)(0s) 杉
				
				

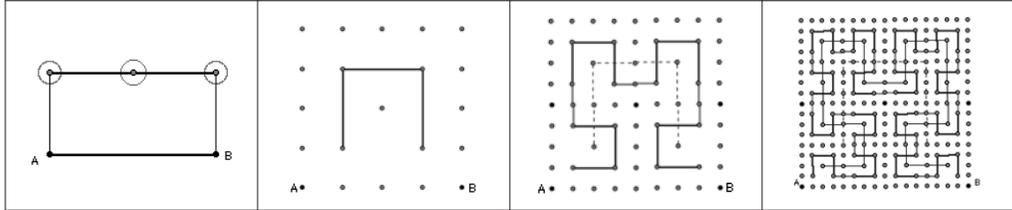
3. 面分生成子によるフラクタル図形

線分生成子が端点および、線分に対する対称性で定義され、自由度が中継点で与えられたように、面分生成子を面分を決定する点と、若干の接続条件で定義することができる。

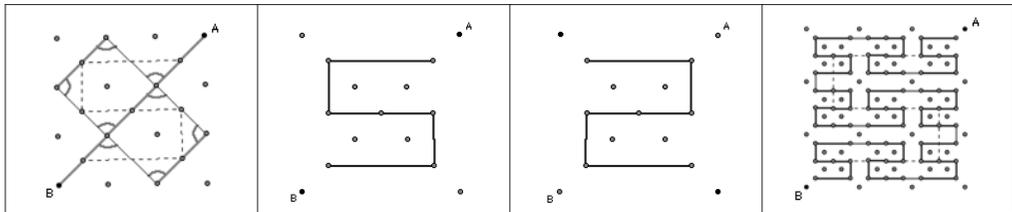
たとえば、正多角形に次のような縮小写像を定義することができる。

バラの花	シェルピンスキー（三角）	シェルピンスキー（四角）
		
		

ヒルベルト曲線では、生成子でない結合部分に長さが次数に依存する線分が存在する。その柔軟なジョイントを j で表記し、線生成子のような 1 経路表示を試みると、1-njppjn タイプと分類できる。1 経路が 4 分割され、3 つのジョイントで結ばれている。



同様に、ペアノ曲線に応用すると、次のようになる。線生成子のように表記すると、1-pjsjpsjpjsjpjsjp となる。結合部のジョイントを、図では弧で示した。図の 2 番目が 1 次の p 、3 番目が s (鏡像) である。1 経路が 9 分割され、8 つのジョイントで結ばれている。



4. 他の条件による生成 1 (放物線, 指数関数, 2 次曲線)

完全差分可能な放物線や指数関数などには、フラクタル的な作図法があり、これによって曲線を可触的ないくつかのパラメータ (点や線) で決定されるオブジェクトとして扱うことができる。

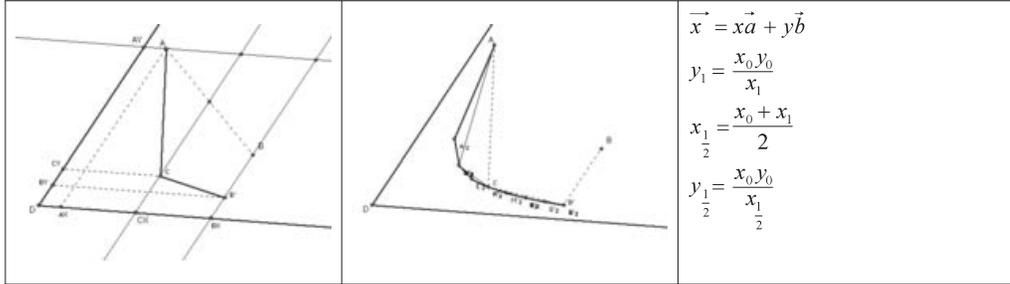
2 分木的には、それぞれ図のような手順で作図できる。

		$y_0 = 0 = c \text{ すなわち, } y = ax^2 + bx$ $y_1 = a + b = 2\bar{y}_1$ $y_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \bar{y}_1 - \frac{a}{4} = \bar{y}_1 - A$ $y_{\frac{1}{4}} = \frac{a}{16} + \frac{b}{4} = \bar{y}_1 - \frac{a}{16} = \bar{y}_1 - \frac{A}{4}$ $y_{\frac{3}{4}} = \frac{9a}{16} + \frac{3b}{4} = \bar{y}_1 - \frac{a}{16} = \bar{y}_1 - \frac{A}{4}$
		$y_0 = A \text{ すなわち, } y = Aa^x$ $y_1 = aA = B$ $y_{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}A = \sqrt{AB}$

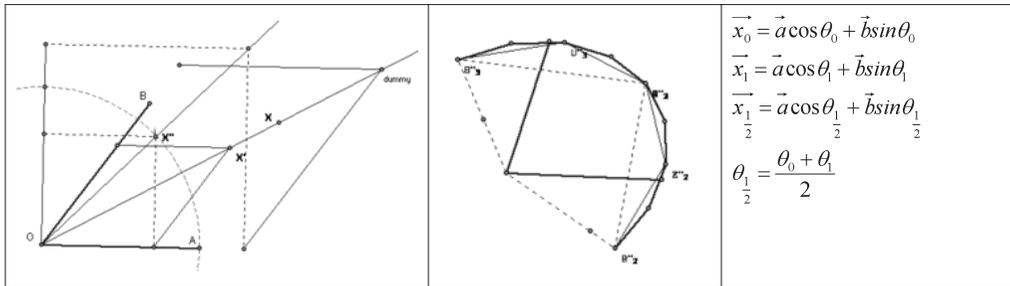
双曲線も 1 端の 1 成分を自由 (ダミー) パラメータにして、次のように自在にオブジェクト

化できる。

詳細化するには、次回から真の端点を用いるとよい。



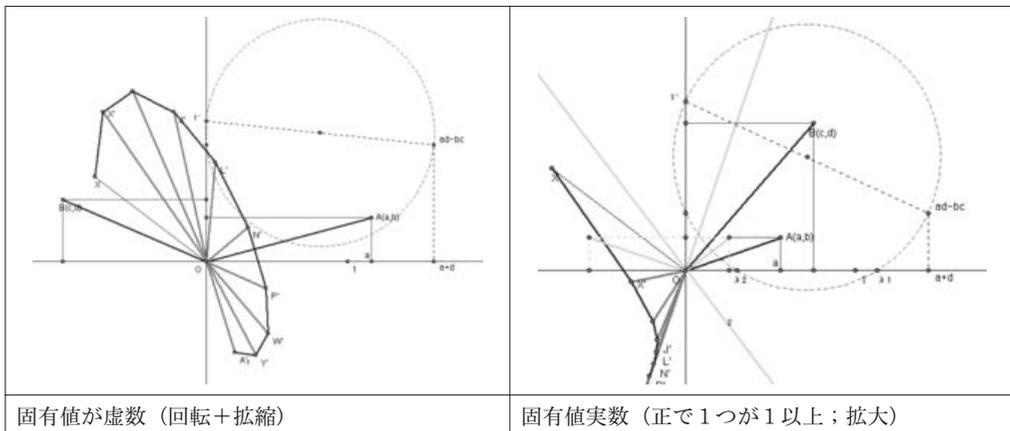
楕円弧についても角度を優先した、両端を自由（ダミー）パラメータにして、次のように自在にオブジェクト化できる。同様に、詳細化には、次回から真の端点を用いるとよい。

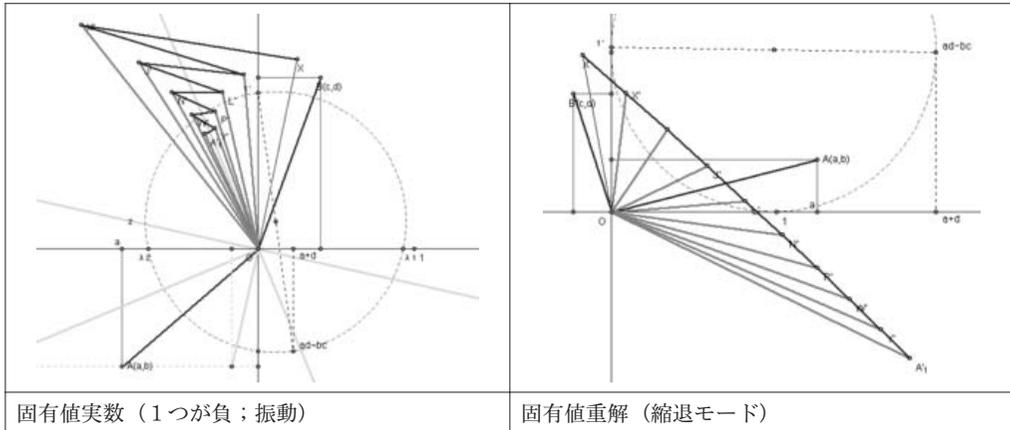


楕円弧作図の原理は、楕円弧が作図の容易な円弧の歪みと捉えることにある。原点からの向き優先にダミー点をとると、射影の点も角度 θ の線上にのることを利用している。

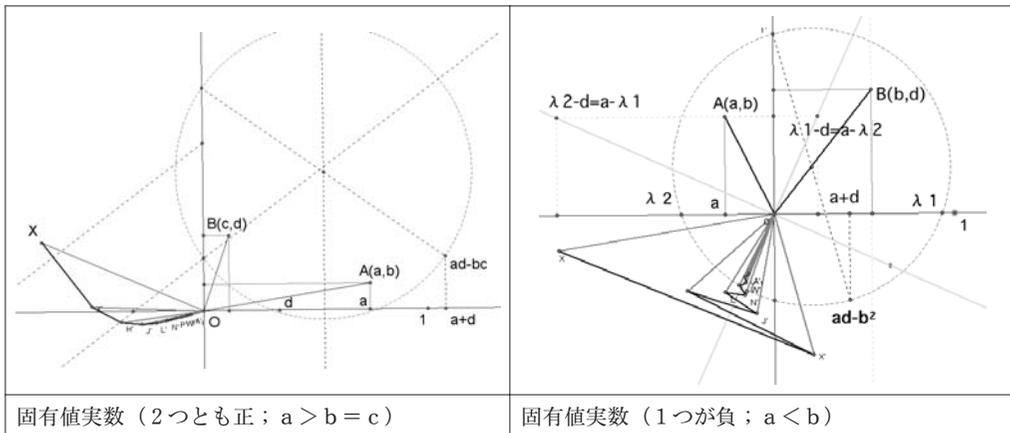
5. 他の条件による生成（2次行列，特殊相対論）

2次行列による射影も、動的幾何の発想に基づくと、非常に教育的に展開することができ、固有ベクトルや振舞の理解にも最適である。また、固有値関連の制限領域や条件の把握が容易になる。行列を $A(a,b)$, $B(c,d)$ の2つの行ベクトルでベクトル平面に重ねて表示すると、行列も扱いやすく、直観的になる。行ベクトルの関係が、固有値やベクトルの射影に与える効果も一目瞭然である。なお、固有ベクトルを直線、実固有値を点 λ_1 , λ_2 で示している。

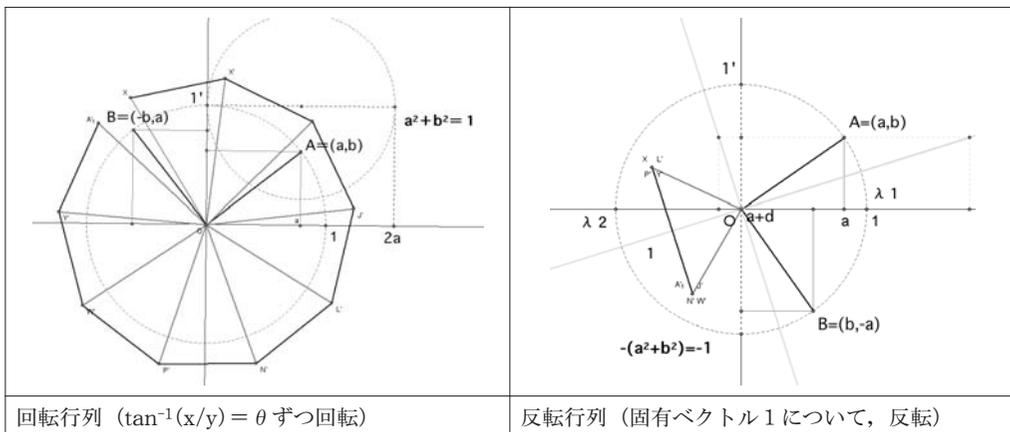




2次行列で、行列要素が関連しあっている時、それによるベクトルの射影に特徴が生まれる。対称行列の時は、 $c = b$ なので、 $D = (a-d)^2 + b^2 \geq 0$ となり固有値は実数となる。また、ベクトルのそれによる射影は次の図のような様相を示す。固有ベクトル $(\lambda_1 - d, b)$ 、 $(\lambda_2 - d, b)$ は直交し、それらの単位ベクトルを列ベクトルとする直交行列は、回転行列となる。



直交行列によるベクトルの射影も、大きさ1の直交するベクトルを回転・反転の2種を明示でき、教育的である。

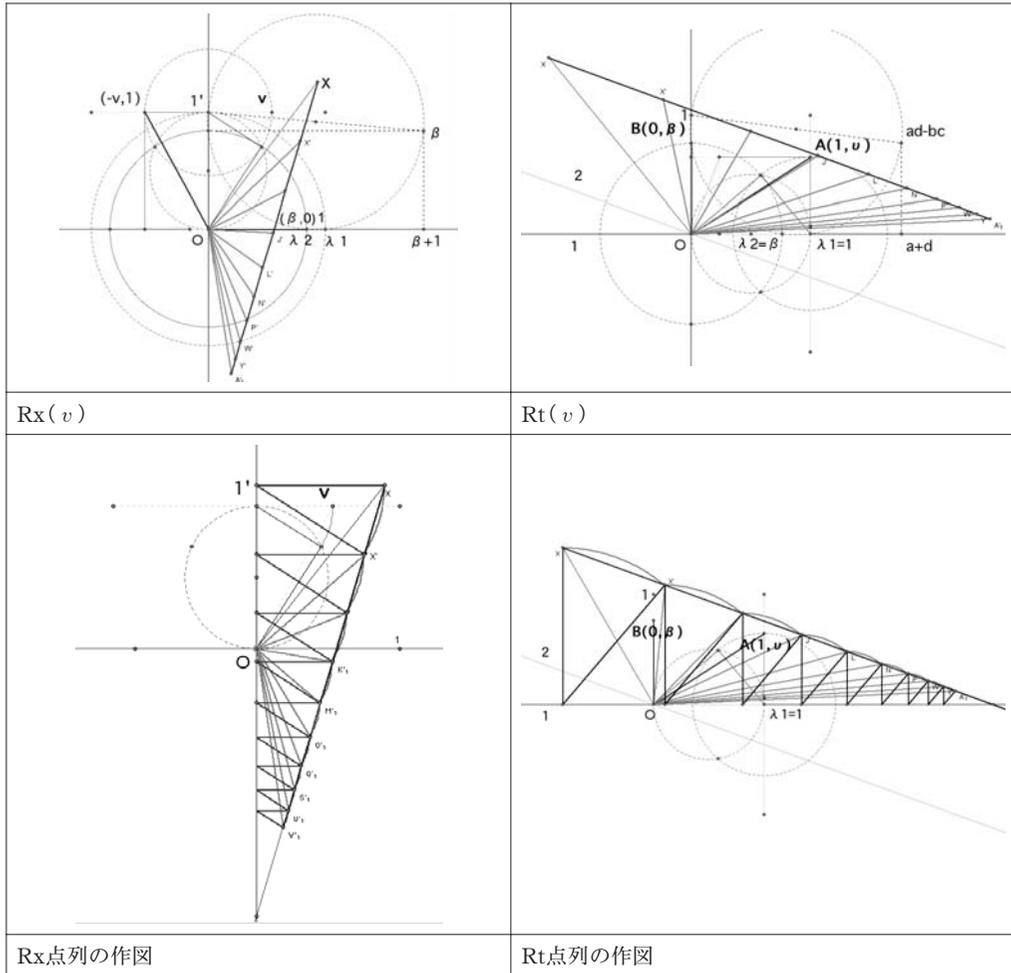


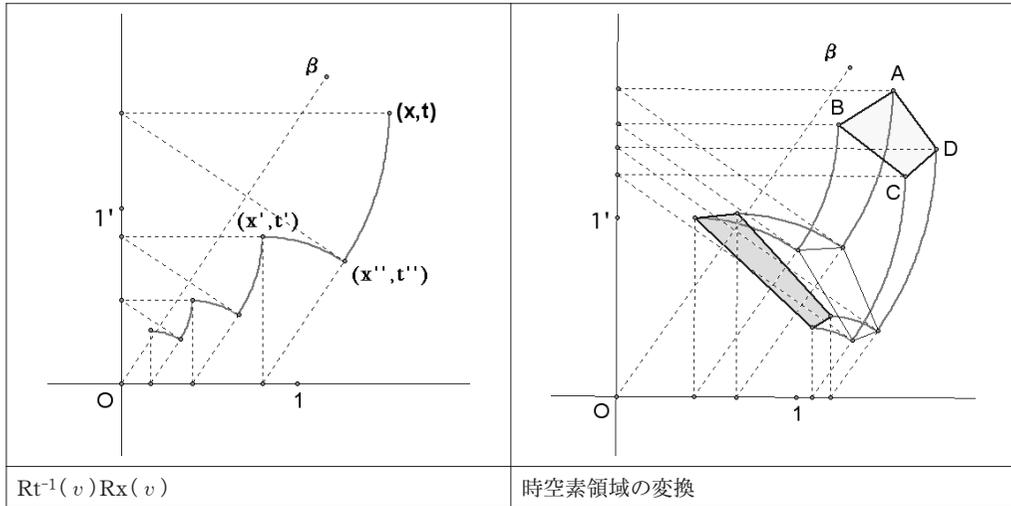
次に三角行列による射影も興味を引くが、これについては、相対性理論の要素を多重に明示的に図示するユーゴ図法¹²⁾で扱う。

ユーゴ図法は、相対性理論の変換式を、時間軸と空間軸に対する、次の2段階の歪み（シア）として、直交座標のまま図的に扱う手法で、理論的帰結を視覚的に把握できる特徴がある。静止系をS、運動系をS'、中間的な系をS''として、上添字で区別すると、変換式は次のようになり、簡単な作図で実現される。なお、中間的な系には、時空対称なS'''も存在している。vは、静止系から見た運動系の速度で、運動系から静止系を見れば、-vとなる。

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = R_x(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = R_t(v) \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{ただし、} \quad R_x(v) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix}, \quad R_t(v) = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \beta = \sqrt{1-v^2}$$

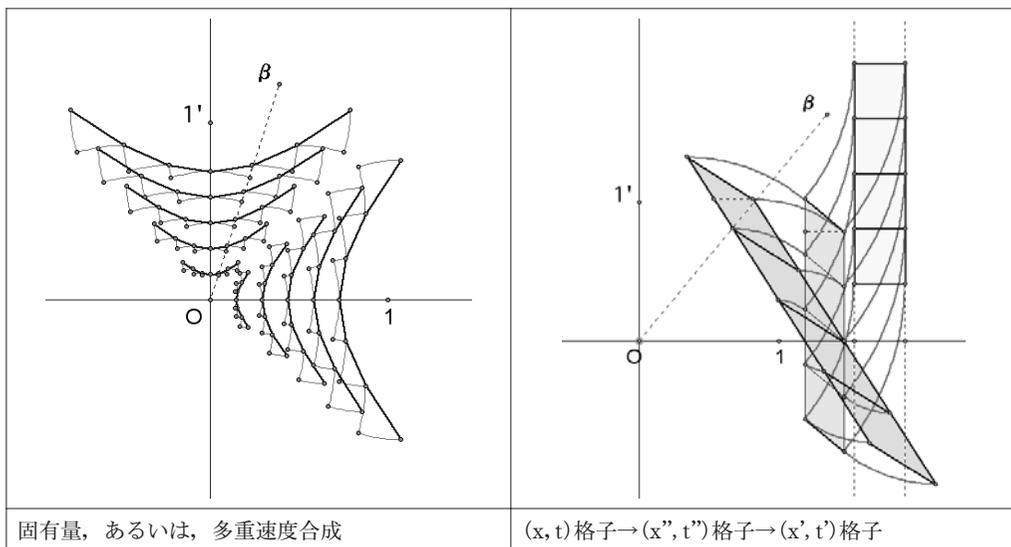
また、これらの逆行列も、図的な解釈から、とても易しい作図法となる。





Rt^{-1} と Rx を組み合わせると、 (x'', t'') を介して、 (x, t) から (x', t') の変換が得られる。時空格子の変換は、その計量を保存する。この変換の解釈は、 S' 系からの S 系の観測にあたり、時空それぞれ、1回の歪みと、1回の等距離回転の組合せになっていることがわかる。このユークリッド法を用いると、非常に簡易な作図の中に、直観的な観測空間幅の短縮（ローレンツ回転）、観測時間幅の伸長を直観的に理解できる。

なお、 $Rt^{-1}(v)Rx(v)$ の点列は、固有量、あるいは、多重速度合成、すなわち、相対論的等加速度運動に関連しているが、簡易な直角双曲線の作図法にもなっている。自在な多重座標系表示が物理的直観を増幅し、さらなる相対論的発想に結びつくことが予測できる。



6. お わ り に

身体を底辺として、論理と感覚を思考の三角形の2辺とする構成は、さらに、自然から人工を飛翔させることにより、思考の正四面体へと止揚され、教育や創発の活用が高められる¹⁷⁾。

特徴は、大乘の「空仮中」に該当するような「中点」から、新しい次元へフレームが浮き上がってコントロールが可能となり、「想」イマジンの訓練が、新しい思考への旅立ち切符となっていることである。今回は、動的幾何によって、いくつもの形態が連続的に繋がったり、進化する創発の場面を、数理的な話題から辿った。

直観鍛錬ともいえる、中点（中庸、折衷、妥協、折り合いなどいろいろな呼び方がある）から、次元を上昇させ自由度を増す訓練が大切になっている。正四面体の頂点が、社会の営みを構成し、重心の止揚が「時」の劣化克服であると捉えれば、モルフォジェネシス形態形成進化の劇中劇を描くことができる。これは、高いレベルの「想」であり、レベルアップした「識」「智」につながる。図解や動的幾何は、そのような広範なもの見方に寄与し、ひいては、心の教育にも結びつく。科学・技術・芸術・政治を始めとして、知識や技能に長けても、魂を忘れた所作は枚挙に暇がない。

視覚的にいくつかのコントロールパラメータを思考平面に折り畳み、現象や表象をスクリーン上に再現させ、操作できることは、これからのリテラシとして、未来に寄与する大切な発想を含んでいる。技能はともかく、過去の経験・知識偏重により、創造的思考や楽しい使い方に到ることがなければ、文化や生活は衰退し、社会にも活気が失われていくだろう。なお、ここにあげた動的幾何ソフトの使用につき、Key Curriculum Press社代表のSteven Rasmussen氏に活用・活動機会を得たことに深謝する。日本の教育界においても、動的幾何ソフトや柔軟な発想が活用されることを念願する。繰り返しになるが、幾何学は数学の一大分野であるにとどまらず、カタチや言葉の源や背景として、伝え合う力や美や発想にも大きく関連している。ここにあげたような動的幾何の例によって、フラクタル宇宙の発想や形態形成、相対論的時空思考も同様に触発され、精神性を高めることも確認された。

参 考 文 献

- 1) 空海著宮坂有勝解釈：空海コレクションI, II, ちくま書房（2004）
- 2) 吉田裕午：紋様における繰り込み概念の形成と組織化，広島文教女子大学紀要 27/, 7-18（1992）
- 3) 吉田裕午：繰り込みによる直観的理解の意味広島文教女子大学紀要 28/, 167-176（1993）
- 4) 吉田裕午：教育情報における繰り込み概念の意味，教育情報研究 9/1, 23-32（1993）
- 5) 吉田裕午：教育情報における三角（参画）型繰り込み，広島文教女子大学紀要29/, 213-223（1994）
- 6) 吉田裕午：動的幾何繰り込みと知の組織化，広島文教女子大学紀要 30/, 175-185（1995）
- 7) 吉田裕午：相対論における繰り込み概念，広島文教女子大学紀要 31/, 157-169（1996）
- 8) 吉田裕午：射影としての繰り込み概念，広島文教女子大学紀要 32/, 191-200（1997）
- 9) 吉田裕午：よみの繰り込み，広島文教女子大学紀要 33/, 143-153（1998）
- 10) 吉田裕午：過渡現象の繰り込み，広島文教女子大学紀要 34/, 11-23（1999）
- 11) 吉田裕午：記憶という繰り込み，広島文教女子大学紀要 35/, 103-112（2000）
- 12) 吉田裕午：相対論的繰り込み，広島文教女子大学紀要 36/, 53-62（2001）
- 13) 吉田裕午：卍字義繰り込み，広島文教女子大学紀要 40/, 45-54（2005）
- 14) 吉田裕午：エンタテインメント繰り込み，広島文教女子大学紀要 41/, 31-44（2006）
- 15) 吉田裕午：進化という繰り込み，広島文教女子大学紀要 42/, 15-24（2007）
- 16) 吉田裕午：次元繰り込み，広島文教女子大学紀要 43/, 41-52（2008）
- 17) 吉田裕午：相繰り込み，広島文教女子大学紀要 44/, 59-71（2009）

—平成22年10月29日 受理—