広島文教教育　Vol. 6　1991.

# 繰り込み概念とシナジェティクス

## ──再帰構造と創造性の考察──

吉　田　裕　午

# The Concept of Renormalization and Synergetics

## A Consideration of Recursive Structures and Creativity

Yugo　YOSHIDA

As computer and mathematical sciences develop, united concepts and methods are being proposed which are useful for global reseach fields.
The "Recursive Structure" used in programming languages, born from the study of artificial intelligences, is one such example. "Recursion" is an unfamiliar word, as yet established. When we use the renormalization concept and graph representation, originating from the elementary particle theory, the top－down style thinking method（ie. recursion）is clealy to be related to "Creativity".
By visualizing and slightly changing some operators and orders, we are lead to unexpected inventions. Graphic expressions such as a tree structure and periodic patterns are interesting enough, even from the Artistic point of view!
We will now consider the recursive structures and creativity, using some application examples. "Synergetics" can be used in various fields and proposes a very important method in enlarging our thinking, by taking the concept of renormalization into account.

キーワード：繰り込み概念、シナジェティクス、再帰構造、創造性、類似性、グラフ表示、トップダウン思考法、視覚化、協同作業、横断性

## 1．再帰構造について

帰納と演繹という言葉は使いふるされた感があるが、トップダウン式思考、ボトムアップ式思考というプログラム開発の考え方に、また、注目が集まっている。

人工知能の開発から生まれたプログラム言語は人間の思考法をシミュレートしているので、創造性について考察する上でも参考になる。

再帰構造はプログラムの中にプログラムがある構造になっているが、このような例は意外に多く、ランダム性を加味したフラクタル図形は自然の形態のモデルにも使われている。

ここでは、適用例として総和、乗積、連分数、再帰図形、微分方程式をとりあげる。複素数列、漸化式への応用も容易である。最近のハイパーカード形式の網目構造、アイデアプロセッサ、属性リストを用いたデータベース、制御測定シ

ステムの構造などにも同様の再帰構造がみられる。マクロ変数で記述された状態の時間発展や不連続変化も再帰構造を適用でき、解の構造に注意を払い、数値計算や他分野とのアナロジーを援用するシナジェティクス［1］という協同作業の方法が大切になる。

## 2. 繰り込み概念について

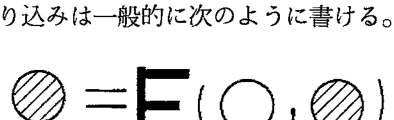
再帰という概念にふさわしい言葉がなかったことが、理解を遅らせている原因のひとつにある。似た言葉に繰り返し、組み込み、刷り込みなどが考えられる。しかし、再帰は単なる繰り返しではない。また、下位の構造が組み込まれてはいるが、再帰構造は発展性をもとから持っている。刷り込みという言葉は比較的近い意味合いだが、発展方向が複数でも構わないということから、さらに拡張的な繰り込みという言葉がふさわしい。

この言葉は、無限大の発散を押さえるために場の量子論に導入された概念［2］で、パラメータ調整などと同様の意味合いで、点に属性を持たせることがこの言葉を採用する理由である。

また、繰り込み理論にも使われているグラフ表示は、視覚的に表現するのに有効である。このグラフ表示と、繰り込まれた点、線、面という意味で繰点、繰線、繰面などという言葉も用いる。例として、ヒルベルト図形の回転方向スピン、紋様の基本図形の鏡像なども取り上げた。

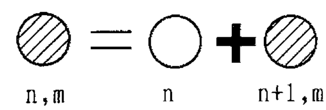
## 3. 数式への適用例

繰り込みは一般的に次のように書ける。



左辺の斜線を引いた丸が、求める繰り込まれた概念、右辺の白丸は初項、あるいは末項のように把握可能な要素、右辺の斜線を引いた丸は通常左辺よりは繰り込み度の大きくない要素、たとえば、残りの各項を繰り込んだ概念である。

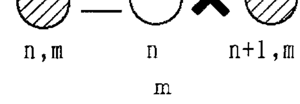
これを再帰的に繰り込すことにより、左辺が具体的に計算される。左辺が、右辺のふたつの要素の関数として表現されることを意味している。数式への適用例として、総和、乗積、連分数の場合のグラフ表示と、具体的な数式、ＬＯＧＯによる手続き（プログラム）を示す。白丸は初項でも、末項でもよい。行動の心理にフィードバックを考慮するにも適している。

総和とは 

$$\sum_{i=n}^{m} f(i) = f(n) + \sum_{i=n+1}^{m} f(i)$$

```
TO 総和 :n :m
  IF :n>:m [output 0]
  output (関数 :n)+(総和 :n+1 :m)
END
```

（関数手続きは別に作るか、直接書く。）

乗積とは 

$$\prod_{i=n}^{m} f(i) = f(n) \times \prod_{i=n+1}^{m} f(i)$$

```
TO 乗積 :n :m
  IF : n>:m [output 1]
  output (関数 :n)*(乗積 :n+1 :m)
END
```

（ここで何もしないとは１を出力すること。）

連分数とは

$$\oslash = \bigcirc + \frac{\bigcirc}{\oslash}$$

例　$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$

この例はａ＝１＋１／ａの解である

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　に収束する。

```
TO 連分数 :n :m
  IF :n=:m [output 1]
  output 1+1/(連分数 :n+1 :m)
END
```

これと似た形式で

$$\oslash = \bigcirc + \frac{\bigcirc}{\bigcirc + \oslash}$$

と書き、白丸を１とすると、ルート２が計算できる。分子を２、３、４と増やしていけば同様にルート３、４、５と難なく平方根が計算できる。これは無理数が非常に身近になる例で、円周率や自然対数の底なども同様に、級数展開や連分数を求める作業で簡単に求められる。

ＬＯＧＯの教育的効果としてよく挙げられている、やり方はひとつではないこと、無理数などの世界へも違和感なく入り込め、やってみようという勇気と意欲が生まれることなどがこの例でも明らかである。さらに、ニュートン法、漸化式、複素数列、遷移行列などの捉えなおしにより、構造的な見方や比較、工夫が可能になる。５．微分方程式への適用とも関連するが、いくつか例をあげる。

等比数列の和（白丸は公比、初項は１）

$$\oslash = 1 + \bigcirc \times \oslash$$

等差数列の和（公差１、初項１のとき）

$$\oslash = \frac{2\cdot\oslash+1+\sqrt{8\cdot\oslash+1}}{2}$$

ニュートン法

$$\oslash = \oslash - \frac{F(\oslash)}{F'(\oslash)}$$

$F(x)=x^2-a$ のとき

$$\oslash = \frac{\oslash + \frac{\bigcirc}{\oslash}}{2}$$

（白丸はａ、ｘ＞０でルートａに収束する。）

ロジスティック曲線の解

（白丸は繰り込まれた時間、５参照）

$$\oslash = \frac{\bigcirc + 1}{\bigcirc + \frac{1}{\oslash}}$$

（１に収束するよう規格化する。）

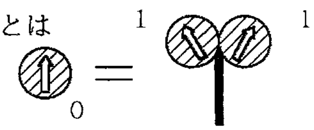
## ４．再帰図形への適用例

自然の形態をみると、スケールを変えた同じ構造の繰り返しのようにみえるものがある。これは成長や秩序に深く関係している。たとえば、

木や結晶は遺伝子や結合方向の特殊性により、樹状成長するものが多い。ここでは、木、雪片曲線、ヒルベルト図形、インスパイラル、紋様に繰り込み概念をあてはめてみる。

思いがない図形に出会うことによって、結晶構造と紋様の類似性に気付いたり、新たな創造に結び付いていくプロセスがここにもある。

木とは




種（芽）は茎（枝）を伸ばし、左右に新たな芽をつける。芽は属性として成長方向をもち、世代があるが、それらを矢印と数でした。

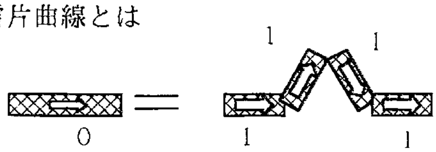
m世代まで成長させる手続きをかくと、

```
TO 木 :n :m
  IF :n=:m [stop]
  前 :n :m
  right 30 木 :n+1 :m
  left 60 木 :n+1 :m
  right 30 後 :n :m
END
```

（前、後の手続きは単純にforward :n-:m と back :m-:nなどでもいい。）

END の前の一行は何事もなかったかのように繰り込むテクニックである。これによって余計な処理から解放され、制作に専念できる。また、左右の成長率や角度、芽の個数、花や葉、色など様々のバリエーションが簡単にできる。

雪片曲線とは



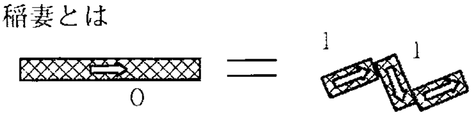

これは、線に繰り込まれた例である。手続き実行後は終点が始点になるタイプで、方向属性を持っている。真中の3分の1のところに作った正三角形の斜辺方向に迂回する。

具体的な手続きを雪とかき、線の最小の長さも引数にして

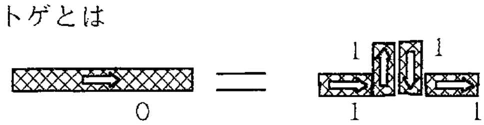
```
TO 木 :n :m :a
  IF :n=:m [forward :a stop]
  雪 :n+1 :m :a
  left 60 雪 :n+1 :m :a
  right 120 雪 :n+1 :m :a
  left 60 雪 :n+1 :m :a
END
```

と書ける。バリエーションでは、次のような繰り込みもグラフ表示で簡単に工夫でき、手続きで書くのも極めて容易である。

稲妻とは

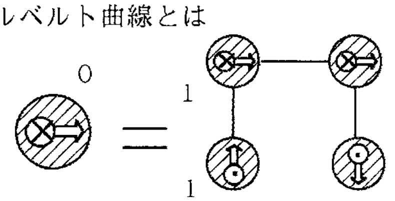



トゲとは




次に繰点の属性として、方向とスピン（回転方向）を取り入れた例をあげる。スピンは±1の値をとり、回転方向を決める。

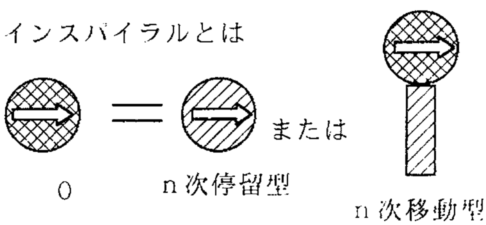
ヒルベルト曲線とは




```
TO ヒルベルト :n :m :a :sp
  IF :n=:m [stop]
  left 90*:sp ヒルベルト :n+1 :m :a -:sp
  forward :a
  right 90*:sp ヒルベルト :n+1 :m :a :sp
  forward :a
```

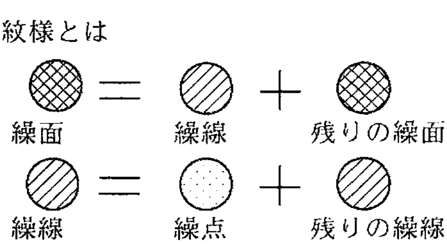
```
 ヒルベルト :n＋1 :m :a :sp right 90＊:sp
 forward :a
 ヒルベルト :n＋1 :m :a -:sp left 90＊:sp
END
```

回転、移動しながら不思議な図形を描くものにインスパイラルがある。そのグラフ表示は次のように書ける。




詳細は記述しないが、繰り返しは紋様に似ている。手続きは角度の変化を等差数列で変えながら、同じ距離進むだけの簡単なものである。

紋様の繰り込みのグラフ表示は次のように書ける。結晶構造に現れる17の平面群［3］を記述するのも極めて簡単である。成長の方向が2つあるのが特徴である。並進はもとより、鏡像、すべり鏡像の表現もスピンを用いた記述で容易にできる。




紋様をデザインする時、基本図形の作成に集中できるメリットは大きい。万華鏡（カレイドスコープ）のシミュレーションなども簡単で、そこには、驚き、発見が繰り込まれている。

## 5．微分方程式への適用例

状態の時間発展は微分方程式で記述される場合が多い。マクロな定性的な量はミクロの粒子や個人の相互作用が時間、空間的に繰り込まれた変数である。平均などの統計処理や因子分析によって多くの変数を少数の変数に集約し、温度、圧力、エントロピーなどのように状態を代表するものとして扱う。時には相変化や集団の分裂といった現象も起こりうる。分裂を起こす状態変数が1あるいは2で、ある関数の最小値に向かうように変化が起こるものについては、カタストロフ理論［4］に応用が多数みられる。

xを状態変数のベクトル、fを変化率を表すベクトルとして、一般的な微分方程式と形式解は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}x = f(x,t)$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' \cdot f(x(t'),t')$$

ただし、$x_0 = x(0)$

形式解は右辺にx（t'）を含むので再帰構造をしている。ところで、具体的に繰り込み形を表現できる場合がある。テクニックは多重積分領域の対称性による変更を用いている。

$f(x,t) = p(t)x + q(t)$ のとき

右辺を繰り込むと

$$x(t) = e^{P(t)}x_0 + \int_0^t dt' \cdot q(t') e^{\int_{t'}^{t} dt'' \cdot p(t'')}$$

$$= e^{P(t)}\left(x_0 + \int_0^t dt' \cdot q(t') e^{-P(t')}\right)$$

ただし、$P(t) = \int_0^t dt' \cdot p(t')$

p，qが定数のときは

$$x(t) = e^{pt}x_0 + \frac{q \cdot (e^{pt} - 1)}{p}$$

（ただし、$p = 0$なら右辺は$x_0 + qt$）

次の場合にも、ケーリーハミルトン法則を使って、きれいな形に書ける。2変数のときは、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ ただし、aは定数行列

解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{at}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ と書ける。

$$e^{at} = \frac{(a-\beta E)e^{\alpha t} - (a-\alpha E)e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$$

$\alpha$，$\beta$は、aの固有値、Eは単位行列。

$\alpha$，$\beta = \lambda \pm i\omega$の時は回転・振動が現れ、

$$\left((a-\lambda E)\frac{\sin \omega t}{\omega} + E\cos \omega t\right)e^{\lambda t}$$

$\omega$が0の極限すなわち、縮退時には

$((a-\lambda E)\ t + E)e^{\lambda t}$ となる。

これは通常の未定係数法以上の見通しを与えている。最後の例などは協同作業のフィードバックを表現している。この形式の拡張である繰り込み概念は、波動方程式や差分方程式、経路積分や変分原理にもよい見通しを与える。カオスなど解の不安定性が本質的と思われているものもあるが、数値解析的不安定は繰り込みによって解消される場合もあることがわかる。

シナジェティクスの手法がここでも大切で、シミュレーションや数値解析と理論の連携により、ソリトンや非線形振動などの知見［5］が得られている。

非線形の繰り込みの例は、3にあげたロジスティック曲線でみると次のようになる。

$$\frac{d}{d\tau}x = (1-x)\ x$$

（ただし、x、$\tau$は規格化している。）

解は $x(\tau) = \dfrac{T+1}{T+\dfrac{1}{x_0}}$ とかけるが、

（ただし、$T = e^{\tau} - 1$）

Tをスケーリングされた時刻をみると

$dT = (T+1)\ d\tau$ であるから、

形式解の構造を調べると、

$$dx = \left(1 - \frac{T+1}{T+\dfrac{1}{x_0}}\right)\cdot\frac{dT}{\left(T+\dfrac{1}{x_0}\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{x_0} - 1\right)}{\left(T+\dfrac{1}{x_0}\right)^2}\cdot dT$$ を積分し、

再び、解が再帰的に決定されている。

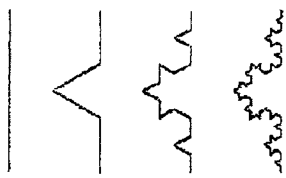
## 6．その他の応用と創造性について

以上は厳密に取り扱える例であったが、文学作品や歴史教材、絵画なども時空を切り取って多くの意味を繰り込んでいる。忠実にという考えもあるだろうが、あるスケール以上は切り捨てられている。また、注目する視点が複数の方がより厚みがでてくるが、それらを往復するハシゴ構造も表現を豊かにしている。繰り込みと外部との接続である授業の導入・まとめ・応用、学校・学年の引継ぎも引数的に大切である。アイデアプロセッサの利用やタイトル・項目なども内容を想起させる意味で繰り込みである。さらには、教育という営みも繰り込まれた自分が、新たに未来に向けて繰り込まれた子どもを生み出すという意味で再帰的である。新しいものを生み出すことが創造性であるが、再帰構造からわかるように、過去が十分に繰り込まれ成長する環境と、未来に向けて試行錯誤を許し、一瞬の発見を大切にする土壌が必要である。すべて完成されたものとみたり、すぐ実用性を問うのではなく、自主的に伸びていく日を待つことも

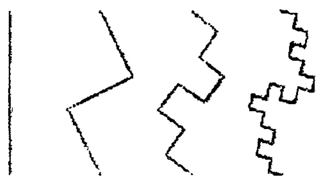
大切である。勿論、見抜く力は指導者に必須であり、再帰構造はすばらしい示唆を与えている。

## 7. 展開例と付録

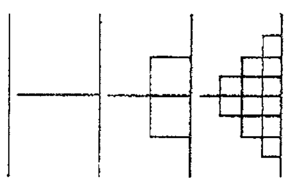
(1)



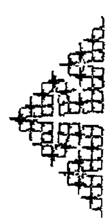
(2)



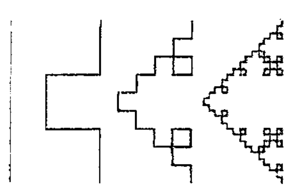
(3)



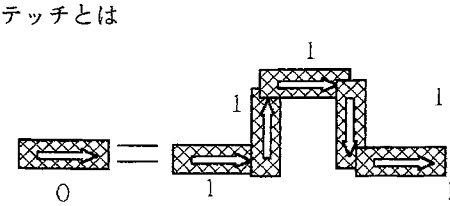
上から雪、稲妻、トゲ、トゲの角を少し広げて森、そして、ステッチ。0次から3次まで展開した。呼称も繰り込みである。



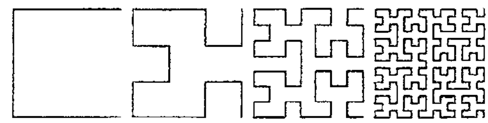
(4)



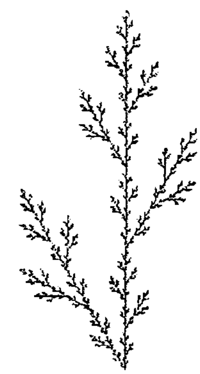
ステッチとは




スピン（回転）属性を持つものとしてヒルベルト図形とすぎの葉の再帰図形を示す。

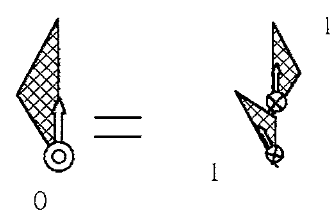


右のような複雑そうにみえる形態が単純な再帰図形であることは驚きである。

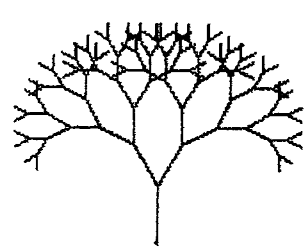


意外と生物の形態も単純な繰り込みである可能性が高くシナジェティクスはこのような探求の手段となる。

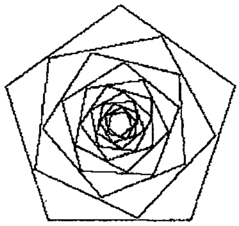
すぎの葉とは




すぎの葉のグラフは、葉序のポイントを表現している。互い違いにだんだんとスケールが縮小して、左右順番に枝別れしている。この例では、下の芽をルート3分の1、枝を3分の1、上の芽を3分の2に次数により縮小している。



左のような単純な木も角度や芽の数、葉の太さ、葉や花の工夫ができる。



回転しながら相似的に拡大・縮小するものは、貝殻や花ビラの成長のイメージでもある。

フィボナッチ数列と成長の関連も繰り込みである。

$A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$, $A_1 = 1$, $A_0 = 0$

$A_{n-1} = B_n$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

ケーリーハミルトン定理より

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

3項漸化式の他にも特殊相対性理論の速度多重合成も $V_{n+1} = \dfrac{V + V_n}{1 + V \cdot V_n}$ の特性解より

$$B_n = \frac{1+V_n}{1-V_n} = T \cdot B_{n-1} = T^n B_0$$

$$\therefore V_n = \frac{T^n B_0 - 1}{T^n B_0 + 1} \quad ただし、T = \frac{1+V}{1-V}$$

と、繰り込み形に記述できる。

3モードの協力現象は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ の行列 a の固有値を

$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、また、Eを単位行列として

$$e^{at} = \frac{(a - \beta E)\ (a - \gamma E)\ e^{\alpha t}}{(\alpha - \beta)\ (\alpha - \gamma)} + \frac{(a - \gamma E)\ (a - \alpha E)\ e^{\beta t}}{(\beta - \gamma)\ (\beta - \alpha)} + \frac{(a - \alpha E)\ (a - \beta E)\ e^{\gamma t}}{(\gamma - \alpha)\ (\gamma - \beta)}$$

の極限から理解される。

$\beta = \lambda + i\omega$, $\gamma = \lambda - i\omega$ のとき

$$e^{at} = A e^{\alpha t} - \left(B \frac{\sin \omega t}{\omega} + C \cos \omega t\right) e^{\lambda t}$$

となり、2－モードと同じく回転しながららせん状に発展するモードが見られる。

(ただし、$A = ((a - \lambda E)^2 + \omega^2 E)/D$)

$B = A'((\alpha - \lambda)(a - \lambda E) - \omega^2 E)$

$C = A'(a - 2\lambda E + \alpha E)$

$A' = (a - \alpha E)/D$, $D = (\alpha - \lambda)^2 + \omega^2$

$\omega = 0$ の2重縮退時には

$e^{at} = A e^{\alpha t} - (Bt + C) e^{\lambda t}$

(ただし、$A = (a - \lambda E)^2/(\alpha - \lambda)^2$)

$B = (a - \alpha E)(a - \lambda E)/(\alpha - \lambda)$

$C = (a - \alpha E)(a - 2\lambda E + \alpha E)/(\alpha - \lambda)^2$

$\alpha = \lambda + \varepsilon$ とし、$\varepsilon$で展開、$\varepsilon = 0$として

3重縮退時には、

$$e^{at} = \left(\frac{(a - \lambda E)^2}{2} t^2 + (a - \lambda E) t + E\right) e^{\lambda t}$$

という $t^2$ に関係するモードを生じる。

広い相関を持つより高次のモードの振舞いは協力現象に示唆を与え、非線形の場合にも、一気に理解が深まるひらめきや、行事を成功に導くためのアイデアを与える。さらに専門性に対して横断性という概念［6］も大切である。

連分数展開を有理数表示すると、3項漸化式と結び付くことが知られている。また、例にあげたフィボナッチ数列との関係も、繰り込みが広い範囲で適用できることを示している。

$$連分数 = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

を $R_n = \dfrac{F_n}{G_n}$ と書く時、

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = T_k \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{pmatrix}$$ ただし、$F_1 = b_1$、$F_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} G_k \\ G_{k-1} \end{pmatrix} = T_k \begin{pmatrix} G_{k-1} \\ G_{k-2} \end{pmatrix}$$ ただし、$G_1 = a_1$、$G_0 = 1$

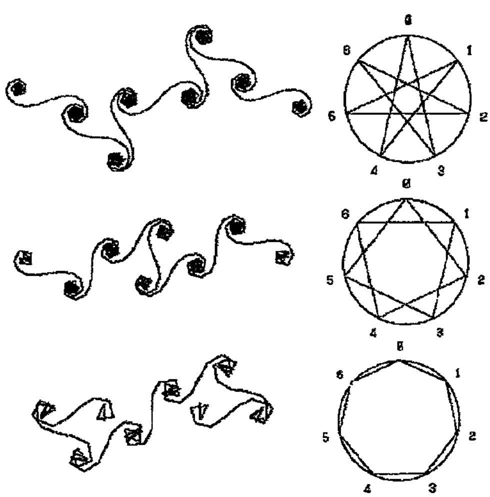
$T_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となるが、$a_k = b_k = 1$ のときは、まさにフィボナッチ数列で書ける。

$$\therefore R_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}$$

ここで、$\alpha$、$\beta$はT$_K$の固有値、$\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

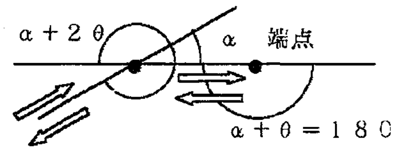
$$R_\infty = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ に収束する。

インスパイラル図形は、余りの計算に結び付いているが、素数で約数でない場合は特に不思議な図形になる。

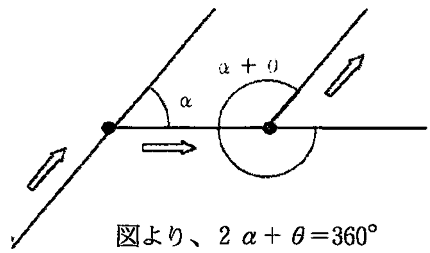



図形が端点を持つのは、回転角が180度になるときであるが、その前後で図形の塊を作る。

ここでは、上から順に7、14、28度ずつ回転角が広がる場合を左に、7種の余りの変化を右に示す。余りが0のみのときは、S字型の図形になる。停留型には、さらに回転対称を伴う複雑なものも可能であり、群論、整数論的にも面白いテーマを与える。

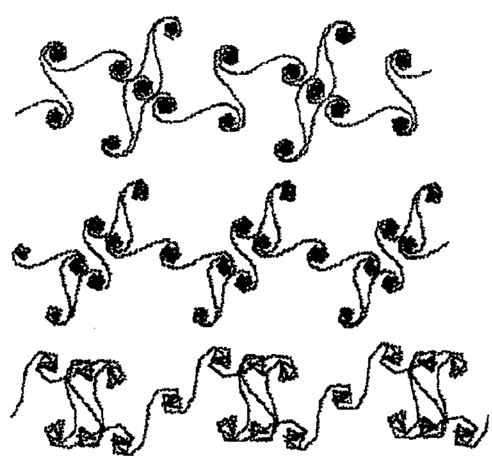



図より、$\alpha = 180° - \theta$

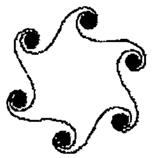



図より、$2\alpha + \theta = 360°$
または、$\alpha = 180° - \theta / 2$

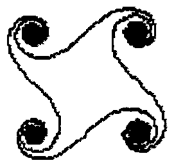
移動型になる場合は、図のように180度をはさんで増加する角のちょうど半分、前後でずれるときである。下に7、14、28度で連続紋様になるものをあげる。



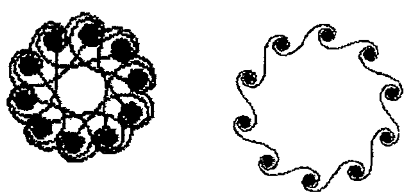
端点をもつ停留型と移動型の間に回転対称な停留型がある。3、4、5、6度ずつ回転角が増える場合の変化の仕方を次に示す。180度前後の余りの大きさによって、繰点が繰線にほどけてくる様子がよくわかる。



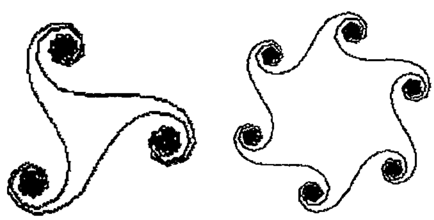
3で余りが1、2のとき



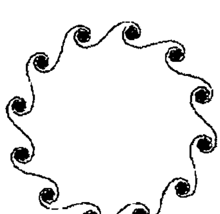
4で余りが1、3のとき



5で余りが左が1、4、右が2、3のとき



6で余りが左が1、5、右が2、4のとき



余りが2、5あるいは
3、5のときはさらに
移動型に近づく。

## 謝　辞

本研究は、福武書店ＮＭ研究所の統合ソフト、findout共同研究のサポートを得て行われ、応用・活用に向けての継続的研究のための援助に感謝する。また、図版の製作にあたり、日立製作所のsuper 3000の使用便宜を受けたことを感謝する。

## 参考文献

[1] H.Haken, Synergetics, Springer, 1977

[2] 広中他，現代数理科学事典，大阪書籍，1991

[3] 大脇他，紋様とデザイン，共立出版，1988

[4] R.Thom, Structural Stability and Morphogenesis, W. A. Benjamin, 1975

[5] 戸田盛和，非線形格子力学，岩波書店，1987

[6] 國井利泰，私情協年会予稿集，1990